Materiały pomocnicze na koło matematyczne
Zbigniew Stebel
Rok szkolny 2011/2012

Zadania konkursowe z algebry i arytmetyki dla uczniów gimnazjów

Zadanie 1.

Czy istnieje liczba naturalna dwucyfrowa o tej własności, że jeśli odejmiemy od niej sumę jej cyfr, to otrzymamy iloczyn jej cyfr.
Rozwiązanie:
Oznaczmy przez $10\cdot x+y$ dowolną liczbę dwucyfrową, gdzie $x,y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $x\neq 0$.
Z treści zadania wynika równanie
(1) $10\cdot x+y-(x+y)=x\cdot y.$
Z (1) mamy $10\cdot x+y-x-y=x\cdot y\Rightarrow 9\cdot x=x\cdot y.$
Rozważmy równanie:
(3) $9\cdot x=x\cdot y.$
Dla $x=0$ równanie jest tożsamością, czyli jest spełnione dla każdej liczby naturalnej y, ale ten przypadek z założenia wykluczyliśmy (zapis dowolnej liczby dwucyfrowej).
Dla $y=9$ równanie jest spełnione dla każdej liczby y ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Z (3) wynika, że
$x=1\Rightarrow y=9$
$x=2\Rightarrow y=9$
$x=3\Rightarrow y=9$
$\dots$
$x=9\Rightarrow y=9.$
Jeśli $y=1\Rightarrow 9x=x\Rightarrow 9=1$, sprzeczność!
Podobnie sprzeczności otrzymujemy z (3) dla pozostałych $y\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$.
Zatem istnieje dokładnie 9 liczb naturalnych o opisanej wyżej własności $19,29,39,49,59,69,79,89,99\}$.

Zadanie 2

Czy istnieją trzy różne liczby pierwsze, których suma odwrotności jest liczbą naturalną ?
Rozwiązanie:
Teza: Nie istnieją takie liczby pierwsze
Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele więc sprawdzenie wszystkich jest niemożliwe.
Dla przykładu:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}+\frac{1}{3}=\frac{31}{30}\notin N$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\notin N$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\notin N$$

Dowód:
Przypuśćmy, że szukana trójka liczb pierwszych istnieje.
Oznaczmy te różne liczby pierwsze odpowiednio przez p, q i r.
Z założenia wynika, że zachodzi równanie

(1) $n=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, gdzie $n\in N, p,q,r\in P$

Mnożąc obustronnie równanie (1) przez wspólny mianownik prawej strony otrzymujemy:
(2) $npqr = qr + pr + pq$

$p|npqr \Rightarrow p|pr \wedge p|pq \wedge p|qr$ ale p nie jest dzielnikiem qr co wynika z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze. Otrzymana sprzeczność kończy dowód tezy.

Zadanie 3.

Dwie liczby naturalne dwucyfrowe mają następujące własności: różnią się o 5 i są podzielne przez 5, suma tych liczb podniesiona do kwadratu jest liczbą, którą otrzymamy, pisząc te liczby obok siebie. Znajdź te liczby.

Rozwiązanie:

Liczby te są postaci _0 i _5 gdyż są podzielne przez 5 i różnią się o 5.
Ich suma kończy się cyfrą 5, gdyż _0+_5=_5.
Kwadrat liczby o ostatniej cyfrze 5 kończy się na 25.
$(10A+5)^2 = 100A^2 + 100A + 25$ dla kwadratu liczby dwucyfrowej.
Ogólnie:
$(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + 5)^2 = \ldots + 25$.
Zatem jedną z szukanych liczb jest liczba 25.
Ponieważ 25-5=20 i 25+5=30, drugą z szukanych liczb może być 20 lub 30.
Sprawdzenie:
$(20+25)^2 = (40+5)^2 = 1600 + 400 + 25 = 2025$
$(30+25)^2 = (50+5)^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$

Odpowiedź: Istnieją dokładnie dwie pary takich liczb naturalnych 20,25 i 30,25.

Materiały pomocnicze na koło matematyczne
Zbigniew Stebel
Rok szkolny 2011/2012

Zadanie 4.

Czy kasjer może wydać resztę 20 zł. siedmioma monetami z których każda ma wartość 1 zł. lub 5 zł. Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie:

Metoda prób.

$0\cdot 1+7\cdot 5=35$

$1\cdot 1+6\cdot 5=31$

$2\cdot 1+5\cdot 5=27$

$3\cdot 1+4\cdot 5=23$

$4\cdot 1+3\cdot 5=19$

$5\cdot 1+2\cdot 5=15$ jak widać resztą może być tylko liczba nieparzysta.

$6\cdot 1+1\cdot 5=11$

$7\cdot 1+0\cdot 5=7$

Metoda algebraiczna.

Mamy siedem monet i każda z nich jest albo 1 albo 5, czyli są liczbami nieparzystymi. Suma 7 liczb nieparzystych jest też liczbą nieparzystą.

Dowód:

Niech $2\cdot k+1, k\in N$ oznacza dowolną liczbę nieparzystą. Wtedy suma 7 takich liczb

$\underbrace{(2k+1)+\cdots+(2k+1)}_{7}=7(2k+1)=14k+7=2(7k+3)+1=2z+1$, czyli jest liczbą nieparzystą, gdzie $z=7k+3\in N$.

Zadanie 5.

Dla jakich liczb całkowitych a i b prawdziwa jest równość $(a+b)^2 = a^2 + ab + 4b^2$. Uzasadnij.

Rozwiązanie:

Ze wzoru na kwadrat sumy otrzymujemy: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + 4b^2$, po redukcji wyrazów podobnych mamy: $ab = 3b^2$.

Jeśli $b = 0$ otrzymujemy tożsamość dla dowolnej liczby całkowitej a.

Jeśli $b \neq 0$ wówczas $a = 3b$, czyli $a \in C \setminus \{0\}$.

Otrzymujemy dwa zbiory rozwiązań:

$\{(a,0) : a \in C\}$, $\{(b,3b) : b \in C \setminus \{1\}\}$.

Zadanie 6.

Wyznacz x i y wiedząc, że $NWW(x, y) = 2275, NWD(x, y) = 13$.

Analiza:

$x = 13p$

$y = 13q,\ p, q \in N$

gdzie $NWD(p,q) = 1$.

Z własności NWW i NWD: $NWW(x, y) \cdot NWD(x, y) = xy$, czyli $2275 \cdot 13 = 13p \cdot 13q \Rightarrow 2275 = 13p \cdot q$.

Po obustronnym podzieleniu ostatniego równania przez 13 otrzymujemy: $p \cdot q = 175$.

Jeśli $p = 1 \Rightarrow q = 175$.

Jeśli $p = 5 \Rightarrow q = 35$.

Jeśli $p = 25 \Rightarrow q = 7$. Ponieważ liczby 5 i 35 nie są względnie pierwsze więc przypadek drugi odpada.

$x = 13p = 13 \cdot 1 = 13$

$y = 13q = 13 \cdot 175 = 2275$

$x = 13p = 13 \cdot 25 = 325$

$y = 13q = 13 \cdot 7 = 91$.

Odpowiedź: $(13,2275), (325,91)$.

Zadanie 6.

Dane są liczby czterocyfrowe podzielne przez 5 o cyfrach nieprzekraczających 7. Oblicz ile jest takich liczb?

Rozwiązanie:

Liczby podzielne przez 5 to liczby o cyfrach jedności 0 lub 5.
Cyfry 0 lub 1 możemy wybrać na dokładnie 2 sposoby.
Cyfry dziesiątek i setek to cyfry $\{0,1,\ldots 7\}$ zatem można je wybrać na dokładnie $8 \cdot 8$ sposobów.
Cyfra tysięcy to cyfra z $\{1,2,\ldots,7\}$ zatem możemy ją wybrać na 7 sposobów, gdyż nie istnieje liczba wielocyfrowa zaczynająca się zerem.
Ponieważ wybory na miejscach dziesiętnych są niezależne więc z fundamentalnej zasady kombinatoryki liczby tych możliwości możemy pomnożyć.
Wszystkich szukanych liczb jest dokładnie $2 \cdot 8^2 \cdot 7 = 896$.

Zadanie 7.

Suma dwóch liczb naturalnych wynosi 20, a suma kwadratów tych liczb 208. Jakie to liczby?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x i y odpowiednie liczby naturalne.
Z warunków zadania wynika układ równań

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

Metoda pierwsza

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego

$$\begin{cases} y = 20 - x \\ x^2 + (20 - x)^2 = 208 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą x:

$$x^2 + 400 - 40x + x^2 = 208 \Rightarrow 2x^2 - 40x + 192 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 96 = 0.$$

Ostatnie równanie jest równoważne równości $(x-10)^2 - 4 = 0$, ze wzoru na kwadrat różnicy.
Ponownie korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy: $(x-10-2)\cdot(x-10+2) = 0$.

Ponieważ $(x-12)\cdot(x-8)=0$, więc $\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 8 \end{cases}$

Dla $x_1 = 12, y_1 = 20 - 12 = 8.$

Dla $x_2 = 12, y_2 = 20 - 12 = 8.$

Zatem szukanymi liczbami są 12 i 8.

Metoda druga

Z faktu, że $x^2 + y^2 = 208$ wynika, że $(x+y)^2 - 2xy = 208$ ze wzoru na kwadrat sumy. Z treści zadania $x + y = 20$, zatem otrzymujemy

$20^2 - 2xy = 208 \Rightarrow 2xy = 400 = 208 \Rightarrow 2xy = 192 \Rightarrow xy = 96.$

Ponieważ suma dwóch liczb jest parzysta więc obie liczby mają tę samą parzystość więc muszą być parzyste gdyż ich iloczyn jest liczbą parzystą.

Jeśli x=2 to y =48 sprzeczność z danymi w zadaniu

Jeśli x=4 to y=24 sprzeczność

Jeśli x=6 to y=16 sprzeczność

Jeśli x=8 to y=12 pasuje do warunków zadania.

Sprawdzenie:

$x + y = 8 + 12 = 20$

$x^2 + y^2 = 8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208.$

Szukanymi liczbami są 12 i 8.

Zadanie 8.

W zeszycie napisanych jest 2010 liczb. Pierwszą liczbą jest 100, zaś każda następna jest o 1 mniejsza od poprzedniej. Oblicz sumę tych liczb.

Rozwiązanie:

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 1 + 0 - (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) - \left(\underbrace{101 + 102 + \ldots + 1909}_{1809}\right) = -\left(\underbrace{101 + 102 + \ldots + 1909}_{1809}\right) = -\frac{2010 \cdot 1809}{2} = -1005 \cdot 1809 = -1818045.$$

Suma tych liczb wynosi -1818045.

Zadanie 9.

Czy zapis dziesiętny liczby 2010^{100} ma mniej niż 330 cyfr ? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

$$2010^{100} > 2000^{100} = 2^{100} \cdot 1000^{100} = \left(2^{10}\right)^{10} \cdot \left(10^{3}\right)^{100} = (1024)^{10} \cdot 10^{300} > (1000)^{10} \cdot 10^{300} = \left(10^{3}\right)^{10} \cdot 10^{300} = 10^{30} \cdot 10^{300} = 10^{330} = 1\underbrace{00\ldots00}_{330}$$

Zatem zapis dziesiętny tej liczby ma więcej niż 330 cyfr.

Zadanie 10.

Ile jest zer w zapisie dziesiętnym liczby utworzonej z kolejno napisanych dodatnich liczb parzystych nie większych od 2010 ?

Rozwiązanie:

Liczby jednocyfrowe parzyste $\{2,4,6,8\}$.Dla tych liczb nie ma zer.

Liczby dwucyfrowe parzyste:

$$\begin{array}{l} 10,12,\ldots,18 \\ 20,22,\ldots,28 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 90,92,\ldots,98 \end{array}$$

Liczb zakończonych zerem jest dokładnie 9:10,20,30,40,50,60,70,80,90.

Wśród liczb trzycyfrowych jest

A) 81 zakończonych zerem

$$\begin{array}{l} 110,120,\ldots,190 \\ 210,220,\ldots,290 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 910,920,\ldots,990 \end{array}$$

gdyż $9 \cdot 9 = 81$.

B) 36 liczb z zerem w środku

$102,104,106,108,$
$202,204,206,208,$ Istotnie, gdyż $4\cdot 9=36$.
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$902,904,906,908.$

C) 9 liczb z dwoma zerami, czyli 18 zer
$100, 200, \dots, 900.$

Wśród liczb 4-cyfrowych z cyfrą 1 na początku jest

A) 81 liczb zakończonych zerem
$1110,1120,\dots,1190$
$1210,1220,\dots,1290$ Ponieważ $9\cdot 9=81$.
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$1910,1920,\dots,1990$

B) 36 liczb z zerem w miejscu dziesiątek
$1102,1104,1106,1108,$
$1202,1204,1206,1208,$ Ponieważ $4\cdot 9=36$.
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$1902,1904,1906,1908.$

C) 36 liczb z zerem w miejscu setek

$$\begin{matrix} 1012, 1014, 1016, 1018, \\ 1022, 1024, 1026, 1028, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1092, 1094, 1096, 1098. \end{matrix} \text{ Ponieważ } 4 \cdot 9 = 36.$$

D) 9 liczb zakończonych dwoma zerami

$$\begin{matrix} 1100 \\ 1200 \\ \ldots \\ 1900. \end{matrix} \text{ Razem } 9 \cdot 2 = 18$$

E) 9 liczb z zerami w miejscu jedności i setek

$$\begin{matrix} 1010 \\ 1020 \\ \ldots \\ 1090. \end{matrix} \text{ Razem } 9 \cdot 2 = 18.$$

F) 4 liczby z zerami w miejscu dziesiątek i setek

$$\begin{matrix} 1002 \\ 1004 \\ 1006 \\ 1008. \end{matrix} \text{ Razem } 4 \cdot 2 = 8.$$

G) Jedna liczba z trzema zerami

$1000.$ Razem $1 \cdot 3 = 3.$

Wśród liczb 4-cyfrowych z cyfrą 2 na początku nie większych od 2010 jest 5 liczb z dwoma zerami i 1 z trzema.
Są to liczby $2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010$. Razem: $5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13.$

Odpowiedź:

Wszystkich zer jest

$9+81+36+18+81+36+36+18+182+8+3+13=357$

Zadanie 11.

Ile dzielników naturalnych ma liczba 2000^{2011}?

Rozwiązanie:

Ile dzielników naturalnych ma liczba 2000?

Rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę 2000

$2000=2\cdot 1000=2\cdot 2\cdot 500=2\cdot 2\cdot 2\cdot 250=2^3\cdot 2\cdot 125=2^4\cdot 5\cdot 25=2^4\cdot 5^3$

Liczba 2^4 ma dokładnie 5 dzielników, zaś liczba 5^3 ma dokładnie 4 dzielniki. Zatem liczba $2^4\cdot 5^3$ ma dokładnie $5\cdot 4=20$ dzielników.

Z treści zadania wynika, że

liczba $2000^{2011}=\left(2^4\cdot 5^3\right)^{2011}=2^{8044}\cdot 5^{6033}$ ma dokładnie $8045\cdot 6034$ dzielników.